Fen-Edebiyat Fakültesi	ARA SINAV KAĞIDI	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz 3	
İmza:	Sınav Tarihi: 12 Kasım 2019	

Her soru 20 puandır. Yanlızca dört soruyu cevaplayın. Süre 80dk.

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{nx}+1}$ limitini (A) $x \geq 0$ için (B) $x < 0$ için belirleyin.

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty}(e^{nx}+1)^{1/n} = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^{nx}+1)}{n}\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{nx}+1}xe^{nx}}{1}\right) = \exp x\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+e^{-nx}}\right) = \begin{cases} e^x, & x>0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

Burada

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 0, & x>0 \\ \infty, & x \leq 0 \end{cases}$$

sonucunu kullandık.

2. (A) $f_n(x) = \dfrac{n^2+ne^x}{n^2x^2+1}$, dizisinin $x \in (0,1)$ aralığında noktasal limiti olan f fonksiyonunu bulun. (B) $\|f\|_{(0,1)}$ nedir? (C) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|f_n\|_{(0,1)} \leq c(n)$ eşitsizliğini sağlayan x'den bağımsız bir $c(n)$ dizisi bulun. (D) Yanlızca bu bilgilerden yararlanarak f_n dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı hakkında ne söylenebilir?

Çözüm:

(**A**) $$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+ne^x}{n^2x^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2x^2} = \frac{1}{x^2}$$

(**B**) $$\|f\|_{(0,1)} = \infty$$

(**C**) $$\|f_n\|_{(0,1)} = \sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{n^2+ne^x}{n^2x^2+1}\right| \leq \sup_{x\in(0,1)}\left|n^2+ne^x\right| \leq n^2+ne^1$$

(**D**) Sınırlı fonksiyonlardan ($\|f_n\| < \infty$) oluşan bir dizi sınırsız bir fonksiyona ($\|f\| = \infty$) düzgün yakınsayamaz.

3. (A) $f_n(x) = n\sin(x/n), x \in \mathbb{R}$ dizisinin noktasal limitini belirleyin. (B) Dizi $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde düzgün yakınsar mı?

Çözüm: (**A**) $m = 1/n$ yazarsak, $n \to \infty$, $m \to 0+$ olur.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} n\sin(x/n) = \lim_{m\to 0+}\frac{1}{m}\sin(mx) = x.$$

(**B**) Supremum alırken x yerine n seçersek,

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{\mathbb{R}} = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|n\sin(x/n) - x| \geq \lim_{n\to\infty}|n\sin 1 - n| = \lim_{n\to\infty} n|\sin 1 - 1| = \infty$$

Yakınsama düzgün değildir.

4. $f_n(x) = xe^{-nx}$ dizisinin $[0,\infty)$ aralığında (A) noktasal ve (B) düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm: (**A**) $x=0$ için $f_n(0)=0$ ve $f(0)=\lim_{n\to\infty} f_n(0)=0$ olur. $x>0$ için, $e^{-nx}\to 0$ olacağından, $f(x) = \lim_{n\to\infty} xe^{-nx} = 0$ olur.

(**B**) Yakınsama düzgündür.

$$f_n'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = e^{-nx}(1-nx) = 0 \implies x = \frac{1}{n},$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f_n - f \right\|_{[0,\infty)} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} xe^{-nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} e^{-1} = 0.$$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+x^n}$ serisinin (A) $0<|x|<1$ için ıraksak olduğunu gösterin. (B) $|x|>1$ için mutlak yakınsak olduğunu gösterin.

Çözüm: (**A**) $0<|x|<1$ için $x^n \to 0$ olduğundan, $\frac{nx}{1+x^n} \to \pm\infty$ olur. Yani $0<|x|<1$ için dizi yakınsamaz. Dolayısıyla n.terim testi nedeniyle seri de yakınsamaz.

(**B**) $|x|>1$ ise,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{nx}{1+x^n} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{nx}{x^n} \right| = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|x|^n}$$

Son serinin yakınsak olduğunu oran testi ile görelim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)/|x|^{n+1}}{n/|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|} < 1.$$

6. (A) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n\,dx$ ve (B) $\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} nx^n)\,dx$ değerlerini, varsa, bulun. (C) Bu iki değerin bu şekilde çıkmış olması neyi gösterir?

Çözüm:

$$(\mathbf{A}),\quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n\,dx = \lim_{n\to\infty} n \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_{x=0}^{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

(**B**)

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0, \qquad 0 \le x < 1$$

olduğundan

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} nx^n \right) dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

(C) Bu sonuç bize $nx^n \to 0$ yakınsamasının $[0,1]$ üzerinde düzgün olmadığını gösterir. Zira düzgün yakınsaklık olsaydı iki sonuç da aynı çıkardı.